УДК 550.831+838

Об определении погрешностей гравиметрических трансформаций

© *Ю. И. Дубовенко, 2011*

Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 16 декабря 2009 г.

Представлено членом редколлегии В. И. Старостенко

Аналітичне продовження сили тяжіння в регіональному масштабі визначає розв'язок нелінійної межової задачі Алексідзе для рівняння сили тяжіння. Оцінено похибку її заміни на відповідну задачу для рівняння Лапласа. Точність розв'язку істотно залежить від міри обумовленості задачі, наближень напрямку шуканого градієнта, параметрів чисельного методу, напрямку зовнішньої нормалі, вздовж якої обчислюють похідні у граничних умовах.

Exact gravity transforms in the regional studies are determined by the solution of nonlinear boundary-value Alexidze problem for the gravity potential. The errors of its substitution by the appropriate problem for the Laplace's equation have been estimated. The accuracy of its solution extremely depends on the problem's conditioning, approximations of the required gradient direction, parameters of numerical calculus and direction of the external normal, along which the proper derivatives are calculated.

Трансформации силы тяжести. Задача восстановления потенциала силы тяжести в больших областях возникла еще в трудах Клеро о фигурах равновесия в виде сфероидов, которые обосновали гравиметрию как науку. Последующие работы Стокса, Пуанкаре и Молоденского указали путь ее решения в виде смешанной граничной задачи для уравнения Лапласа. Из-за приближенности граничных условий эта задача гарантирует удовлетворительную точность вычислений потенциала только в локальных областях "малой меры" [Якимчик, 2001].

Другой путь вычислений потенциала основан на том, что, согласно работе [Юнг, 1936], аномалии силы тяжести считают в первом приближении значениями "вертикальной" производной этой аномалии, т. е. реальные значения силы тяжести заменены гармонической функцией V_z. Это позволило на базисе теории гармонических функций возвести всю теоретическую надстройку современной гравиметрии. Но погрешность такой замены, как указано в работе [Якимчик, 2001] и ниже, растет с размерами области сосредоточения аномальных масс. Вследствие сказанного для надежного восстановления потенциала при региональных исследованиях следует воспользоваться иными методами, например [Дубовенко, 2009].

Гравиметрическая съемка определяет набор значений модуля градиента потенциала u силы тяжести (МГПСТ) $\mathrm{g}\big|_S = \mathrm{grad}\, u\big|_S = \psi\,(S)$ на некоторой *замкнутой* дневной поверхности S, которая целиком охватывает тяготеющие массы в области G поиска трансформант. Прямая его трансформация не имеет отношения к линейным граничным задачам математической физики и является нетривиальной задачей из-за неизвестного направления вектора $\mathrm{g}\big|_S$. При приближенном решении этой задачи ее граничные данные можно задавать на незамкнутой, но довольно большой поверхности [Алексидзе, 1965].

Трансформацию значений гравитационного поля определяют путем решения граничной задачи непосредственно для нелинейного дифференциального оператора $A\,(g)$ силы тяжести в области задания $\mathrm{g}\big|_S$ [Черный, 1970]:

$$A\left(g\right) = \Delta g\left(x_i\right) - a^2\left(g, x_i\right) g\left(x_i\right) = v\left(x_i\right), \quad x \in G, \;\; i = 1, 3, \qquad (1)$$

где $a^2(g, x_i) = \sum_{i=1}^{3} \cos\alpha_i \, \Delta \cos\alpha_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{g_j}{g} \right)^2$ — геометрический фактор поля тяжести, $v(x_i) = -4\pi\gamma \left| \mathrm{grad}\, \sigma(x_i) \right|$ — заданная функция распределения масс, α_i — угол между направлением вектора $\mathrm{g}\big|_S$ и i-й координатной осью. Это уравнение учитывает направление силы тяжести и сложно для вычислений. Если вектор $\mathrm{g}\big|_S$ в любой точке пространства направлен в одну и ту же точку $P(x_i^0)$, $i = \overline{1, 3}$ (вдоль нормали к поверхности эллипсоида), уравнение (1) упрощается [Алексидзе, Гелашвили, Картвелишвили, 1972]:

$$\Delta g(x_i) - 2g(x_i) / r^2 = v(x_i), \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(x_i - x_i^0 \right)^2}. \qquad (2)$$

Практические способы перерасчета значений силы тяжести — постановка и решение граничной задачи непосредственно для значений МГПСТ [Алексидзе, 1985] либо решение *нелинейной* внешней граничной задачи Алексидзе для потенциала силы тяжести:

$$\Delta u(x_i) = \begin{cases} -4\pi f \sigma(x_i), & x \notin G, \\ 0, & x \in G, \end{cases} \quad u\big|_\infty = 0, \quad \mathrm{grad}\, u\big|_S = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2}\,\Bigg|_S = \mathrm{g}\big|_S = \psi(S),$$

$$i = \overline{1, 3}. \qquad (3)$$

Линеаризация задачи (3) возможна в предположении касательно направления МГПСТ на поверхности S, которое вносит значительные погрешности, а определение направления силы тяжести — громоздкая задача, как и определение МГПСТ. Для внешней тяготеющей точки получено уравнение [Алексидзе и др., 1972]

$$g \Delta \cos\alpha_i \sum_{i=1}^{3} g_{x_i} \frac{\partial \cos\alpha_i}{\partial x_i} + \Delta g \cos\alpha_i = 0, \quad i = \overline{1, 3},$$

определяющее модуль силы тяжести g по известным распределениям углов α_i в пространстве G (или косинусы углов α_i по известным значениям g в G с неопределенностью $\cos a_i$ на бесконечности).

Вопрос разрешимости и единственности задачи (3) для потенциала силы тяжести принципиален в гравиметрии: отвечает, возможно ли высокоточное *однозначное* определение силы тяжести во внешнем пространстве по точным абсолютным значениям силы тяжести на замкнутой поверхности S, целиком охватывающей все массы, и какие нужны минимальные дополнительные данные. Вычисление силы тяжести во внешнем пространстве при условиях одновременного определения на поверхности S ее абсолютных значений и направления несложно, но дорого и делается редко.

Решают задачу (3) путем последовательных приближений. В плоском случае (граничные значения $\psi(S)$ и функция u зависят от двух переменных) задача определения гармоничной функции, модуль градиента которой задан на замкнутом контуре,

$$\Delta u(x_i) = 0, \quad x_i \in G, \quad u\big|_\infty = 0, \quad \mathrm{grad}\, u\big|_S = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2}\,\Bigg|_S = \psi(S), \quad i = \overline{1, 2}, \qquad (4)$$

не имеет единственного решения [Алексидзе, 1985]. Если $f(z) = u(x_i) + iv(x_i)$, $i = \overline{1, 2}$, — произвольная голоморфная в G функция, действительная часть $\operatorname{Re} f(z)$ которой совпадает с решением граничной задачи (4), ее мнимая часть $\operatorname{Im} f(z)$ *также* является решением [Алексидзе, 1985] задачи (4). Отношение Коши — Римана $k_1 \cdot k_2 = -1$ — условие перпендикулярности градиентов u, v, где $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_1}$ и $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\partial v}{\partial x_2} \Big/ \frac{\partial v}{\partial x_1}$ — угловые коэффициенты касательных вдоль градиентов функций u и v (α_1, α_2 — углы между положительным направлением оси и u и v).

В конечной μ-окрестности направления l градиента $\operatorname{grad} U = \frac{\partial u}{\partial l}$ одного из решений граничной задачи (4) не существует другого решения задачи (4), т. е. нет двух решений задачи (4), направления градиентов которых составляли бы угол меньше μ (угол между градиентами двух решений (4) — $\pi/2$, решения, различающиеся постоянной, — тождественны). Проверка этого предположения осуществлена путем численного решения методом [Алексидзе, 1978] граничной задачи (4) с помощью итераций

$$\Delta u^k(x_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{2} \alpha_i\left(u^{k-1}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \psi(S), \quad i = \overline{1, 2}, \tag{5}$$

где коэффициенты

$$\alpha_i\left(u^{k-1}\right) = \frac{\partial u^{k-1}}{\partial x_i} \Bigg/ \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial u^{k-1}}{\partial x_i}\right)^2}$$

направляющих косинусов получены нормировкой граничных условий задачи (4), u^k — k-е приближение ее решения.

Погрешности трансформаций. Погрешность ε замены уравнения (2) на уравнение Лапласа $\Delta g(x_i) = 0$ — разность решений на сфере G радиуса a граничных задач для уравнений силы тяжести $\Delta g(x_i) - 2g(x_i)/r^2 = 0$, $x \in G$, и Лапласа $\Delta g(x_i) = 0$, $x \in G$, с одинаковым граничным условием $g\big|_S = \psi(S)$. Вектор $g\big|_S$ направлен в одну и ту же точку O (ξ, η, ζ). Погрешность удовлетворяет граничной задаче $\Delta\varepsilon = 2g(x_i)/r^2$, $x \in G$, с однородными граничными данными $\varepsilon\big|_S = 0$, причем $u \le \varepsilon \le v$. Если начало координат совпадает с центром сферы G, то в точке $x_i = 0$, $i = \overline{1, 3}$, имеем

$$a^2 \gamma_2 \big/ 6 \le \varepsilon \le a^2 \gamma_1 \big/ 6, \tag{6}$$

и при условии, что область G касается поверхности Земли, нормальное гравитационное поле будет равно

$$\gamma_1 = \max_{x_i \in G} 2g(x_i) \big/ r^2 \le 2 \max_{x_i \in G} g(x_i) \Big/ \left[\min_{x_i \in G} r\right]^2 \approx \frac{2 \cdot 981000}{(6360)^2},$$

$$\gamma_2 = \min_{x_i \in G} 2g(x_i) \big/ r^2 \le 2 \min_{x_i \in G} g(x_i) \Big/ \left[\max_{x_i \in G} r\right]^2 \approx \frac{2 \cdot (978\,000 - 300a)}{(6380 + a)^2}.$$

Отсюда, согласно (6), при $a = 100$ км получаем $76 \le \varepsilon \le 81$ мГал. В перерасчете силы тяжести в свободном пространстве по формуле Пуассона погрешность может достичь 100 мГал на больших площадях земной поверхности.

В плоском случае $\gamma_2 \left(a^2 - \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \right) \Big/ 4 \le \varepsilon \le \gamma_1 \left(a^2 - \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \right) \Big/ 4$ при $x_i = 0,\ i = \overline{1,3}$, дает $51 \le \varepsilon \le 54$ мГал.

Согласно (6), $\varepsilon = g - \bar{g} \le 0$, поэтому действительное значение силы тяжести всегда *меньше*, чем полученное в предположении ее гармоничности (на это указывает и $\Delta g \ge 0$ — условие вогнутости поверхности).

Если на сфере G величина $2/r^2$ постоянная, то погрешность ε_1 является решением граничной задачи $\Delta\varepsilon_1 = 2g \left(1 / r_0^2 - 1 / r^2\right)$, $r \in G$, где r_0 — среднее значение r в сфере G. Выражение $\frac{1}{6}\left(a^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \right) \frac{2g}{6370^2} \cdot 0{,}03$ мажорирует ε_1, поэтому $\varepsilon_1 < 2{,}5$ мГал, а при $a \le$ ≤ 100 км — $\varepsilon_1 < 1$ мГал. Таким образом, члены при r в уравнении (2) почти постоянны. Сравнение соответствующих погрешностей указывает, что уравнение силы тяжести лучше аппроксимировать уравнением (2), чем уравнением Лапласа.

Уравнение силы тяжести (2) при $r = r_0$ быстрее сходится, а при малом a / r_0 погрешность этой замены $\varepsilon_2 = 2g\, x_3 \left(a^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i \right) \Big/ 5\, r_0^3$ имеет экстремумы $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = \pm\, a / \sqrt{3}$.

На границе S аномальной области G $\varepsilon_2 \equiv 0$, т. е. $\max \left| \varepsilon_2 \right| = 4g\, a^3 \Big/ 15 \sqrt{3}\, r_0^3$, откуда при $a =$ $= 100$ км $\varepsilon_2 < 0{,}5$ мГал. В этих оценках погрешности замены уравнения (2) уравнением Лапласа предположено, что на замкнутой границе S известны *точные* значения силы тяжести; приближенные значения $g \big|_S$ несколько увеличат величину погрешностей.

В практике гравиметрии при перерасчете во внешнем пространстве решают не внутреннюю граничную задачу, а внешнюю (ее сводят к решению внутренних граничных задач [Алексидзе, 1965]). Погрешность перерасчета во внешнем пространстве G (замены внешней граничной задачи $\Delta g\,(x_i) - 2g\,(x_i) / r^2 = 0$ на внешнюю задачу $\Delta g_1\,(x_i) = 0$ при одинаковых граничных условиях $g \big|_{r=a} = \psi\,(S)$, $g \big|_{\infty} = 0$) равна $\varepsilon = \frac{c}{a} \left(a / r^2 - 1 / r \right)$ и достигает максимума в области G при условии $\varepsilon \big|_{r=2a} = -\, g\,(a) \,/\, 4$, где $g\,(a)$ — значение силы тяжести на поверхности сфероида. Предположение гармоничности силы тяжести в перерасчете на высоту 6000 км дает погрешность ~ 245 Гал.

Радиальная компонента $V_r = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{M}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \zeta)^2}} \right) = \frac{M\,(r - \zeta\cos\theta)}{\left(r^2 - 2r\zeta\cos\theta + \zeta^2 \right)^{3/2}}$

аномалии $V\,(x_i) = M \,/\, (x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \zeta)^2)$ от однородной сферы массой M с центром в точке $P\,(0,\ 0,\ \zeta < 6375)$ имеет погрешность перерасчета $\bar{\varepsilon}_1 = \frac{c}{r} + V_r$, где c — произвольная постоянная. В точках $r = a$ и $\theta = 0$ погрешность равна $\bar{\varepsilon}_1 = M\,[-\,a \,/\, (a - \zeta)^2\, r + V_r\,]$, а ее максимум при любом фиксированном r существует в $\theta = 0$, возрастая от $-\infty$ $(r = 0)$ до $+\infty$ $(x_3 = \zeta)$, спадает к отрицательному максимуму в точке $r = r\,(\zeta)$ и равен нулю в точке $r = a$. Если масса $M = 100\,(a - \zeta)^2$, аномалия в ближней точке поверхности $(0,\ 0,\ a)$ равна 100 мГал; при $a = 6371$, $\zeta = 6361$ и $r = 6381$, $\bar{\varepsilon}_1 \approx 8$ мГал.

Итак, трансформацию наблюденного или нормального поля силы тяжести во внешнем пространстве можно осуществлять путем решения методом [Алексидзе, 1978] граничной задачи для уравнения силы тяжести (2), конкретные операторы которого для разных референц-поверхностей [Алексидзе, 1985] в случае земного эллипсоида вращения (с достаточно малым сжатием) не генерируют существенно различных результатов близ Земли.

Необходимые в численном моделировании явные аналитические выражения фундаментальных решений уравнения силы тяжести (2) получены в общем виде [Черный, 1982]. Для вычислений важно представлять соответствующие интегралы в элементарных функциях.

Перерасчет "аномалии" силы тяжести $\delta g = g(S) - \gamma(S)$ (разности нормального и наблюденного поля силы тяжести) имеет свои нюансы [Дубовенко, 2010]. Впрочем, с точностью $0 \le \varepsilon \le$ $\le 0{,}04$ мГал аномалии силы тяжести на равнине являются значениями вертикальной составляющей по направлению модуля градиента.

Перерасчет в нижнее полупространство известной плотности $\sigma(P)$ в уравнении (2) несложен. В практике региональной гравиметрии при перерасчете в сторону масс нередко на поверхности S известны вертикальные составные $\partial W / \partial x_3$ аномалии, а под поверхностью аномальные массы расположены на неизвестном расстоянии от нее и следует гармонически продолжить $\partial W / \partial x_3$ в сторону масс к ближайшим особым точкам поля. Задача в подобной постановке *существенно некорректна* (имеет бесконечное множество решений [Алексидзе, 1985]).

Результаты вычислений. Численно решена [Алексидзе, 1978] нелинейная граничная задача (3) для пространственного случая с помощью итерационного процесса

$$\Delta u_n = 0, \quad \left[\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \left(u_{n-1} \right) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right] \Bigg|_S = \psi^2 \left(S \right), \tag{7}$$

где u_n и u_{n-1} — n-е и $(n-1)$-е приближение, $\alpha_i\ (u_{n-1})$ — i-й направляющий косинус градиента $(n-1)$-го приближения u_{n-1}. С целью проверки сходимости итерационного процесса (7) решены такие внешние граничные задачи:

$$\Delta u = 0, \quad \left| \operatorname{grad} u \right| \Big|_S = \frac{h}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \tag{8}$$

$$\Delta u = 0, \quad \left| \operatorname{grad} u \right| \Big|_S = \frac{h}{(x_1 - h)^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{h}{(x_1 + h)^2 + x_2^2 + x_3^2}, \tag{9}$$

$$\Delta u = 0, \quad \left| \operatorname{grad} u \right| \Big|_S = h \sqrt{\frac{2\left(x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2\right)}{\left((x_1 - h)^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left((x_1 + h)^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{\left(x_1^2 + x_2^2 - 2h x_1 + x_3^3\right)}{\left((x_1 - h)^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^3} + \frac{\left(x_1^2 + x_2^2 - 2h x_1 + x_3^3\right)}{\left((x_1 + h)^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^3}}, \tag{10}$$

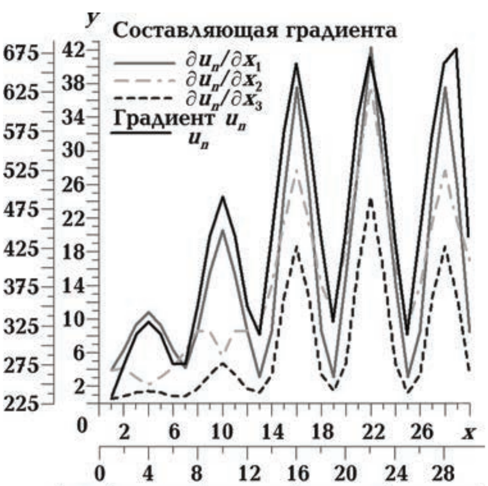
где $h = 10$, $x_3 = 5$ км, S — горизонтальная плоскость. Точное решение граничных задач (8) и (10) таково:

$$u = \frac{h}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \quad \text{и} \quad u = \frac{h}{\sqrt{(x_1 - h)^2 + x_2^2 + x_3^2}} + \frac{h}{\sqrt{(x_1 + h)^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

а граничная задача (9) точного решения не имеет. Рис. 1 иллюстрирует результаты решения за 5 итераций задачи (8) в 30 точках поверхности S на равномерной сетке с шагом $\Delta x_i = 10$ км в области $-25 \leq x_2 \leq 25$ км, $-25 \leq x_1 \leq 15$ км (нумерация узлов — рост x_1 при нарастании x_2). Первое приближение направления грубое — $\alpha_1(u_1) = \alpha_2(u_1) = 0$, $\alpha_3(u_1) = 1$. В другом варианте решения взято $\alpha_1(u_1) = 0{,}8$, $\alpha_2(u_1) = 0$, $\alpha_3(u_1) = 0{,}6$, а градиент u_n и правая часть граничного условия (8) совпали с точностью до $\varepsilon = 10^{-6}$ за 6 итераций. Модули точного и приближенного градиентов совпадают с точностью 10^{-7}.

Граничные задачи (8)—(10) решали для разных первых приближений и положения вспомогательных точек [Алексидзе, 1978], определяющих фундаментальные решения. В случае рис. 1 вспомогательные точки взяты на плоскости $x_3 = 1$. Число итераций в вариантах варьировало незначительно (не более 10). *Граничные значения* точных и приближенных градиентов совпадают с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$, они сами совпадают с меньшей точностью из-за *плохой обусловленности* задач с производными в граничных условиях (для них, в отличие от задачи Дирихле, несправедлив принцип максимума). Эту особенность, не связанную со сходимостью итераций, следует учитывать в практическом моделировании.

В определении погрешности решения задачи (8) задействованы 36 фундаментальных решений, равномерно расположенных на плоскости $x_3 = 1$, граница S — плоскость $x_3 = 5$. Левая и правая части граничных условий (8) после четвертой итерации совпали с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, относительная погрешность решения u — 10 %, абсолютная — 10^{-1}; в производных погрешности достигают 80 %. Увеличение числа функций до 49 снизило погрешность решения u, производных — до 3—5 %, $\partial u / \partial x_3$ — до 20 %. Наращивание их числа до 64 увеличило погрешность решения и производных до 70 %, хотя правая и левая части граничного условия (8) после восьми итераций совпали с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Этот эффект объясняют [Алексидзе, 1985] неминимальностью систем фундаментальных решений и малостью детерминанта матрицы коэффициентов для фундаментальных решений.



Номер	u_n	$\partial u_n/\partial x_1$	$\partial u_n/\partial x_2$	$\partial u_n/\partial x_3$
1	234,561	3,875	3,876	0,548
2	275,455	6,281	4,188	0,839
3	313,623	9,262	3,087	1,236
4	330,394	10,819	2,202	1,442
5	313,686	9,262	3,086	1,234
6	275,596	6,293	4,191	0,837
7	275,607	4,190	6,282	0,837
8	350,166	8,581	8,581	1,713
9	440,122	15,497	8,533	3,412
10	490,258	20,553	5,588	4,712
11	440,203	15,269	8,533	3,412
12	350,065	8,582	8,584	1,717

Рис. 1. Решение внешней граничной задачи Алексидзе (8) и фрагмент соответствующей таблицы данных ($\times 10^3$).

Точка $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, создающая поле в задаче (8), — одна из вспомогательных [Алексидзе, 1978], определяющих фундаментальные решения. Этим объясняем немалую точность определения производных $\partial u / \partial x_i$ по приближенному решению. Если она не входит в состав вспомогательных точек, точность определения производных хуже, особенно для $\partial u / \partial x_3$.

Если направление градиента на *всей* границе S образует с внутренней нормалью *острый угол*, внешняя граничная задача (3) решается с удовлетворительной точностью и погрешность обусловлена не плохой сходимостью итераций (7) (число их мало), а *плохой обусловленностью* граничной задачи с косой производной.

В общем случае, граничная задача с косой производной вдоль направления l

$$\Delta u = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_S = \psi(S) \tag{11}$$

при условии, что направление внешней нормали N

неортогонально направлению l (l ни в одной точке границы G не совпадает с касательной)

$$\inf_{x_2 \in S} \left(N, l\right) > 0 , \tag{12}$$

не имеет решения, отличного от постоянного [Бицадзе, 1966]. В граничных задачах (8)—(10) это условие выполняется на любой *конечной части* плоскости S, так как поле создано точечным источником, а на *всей* бесконечной плоскости — нет, ибо в бесконечно удаленной точке плоскости $S\,(N,\, l)\big|_{x_2 = \infty} = 0$. Для внутренней граничной задачи (11) и точечного источника P вне области G условие (12) для достаточно гладкой границы *невыполнимо*, так как всегда будет существовать точка на S, в которой вектор с началом в P ортогонален к нормали. Численные эксперименты на сфере G обнаружили плохую обусловленность граничной задачи (11), хотя граничные условия удовлетворяются хорошо, вычисленные и точные значения градиента u и его производных *существенно разные*.

Решение внутренней граничной задачи (8) для единичного куба G (внешняя нормаль имеет шесть разных направлений, начало координат (0, 0, 0) расположено на расстоянии 0,2 от нижней кромки куба G, а 24 вспомогательные точки взяты на кубе со стороной 1,4) согласно (7) при $\alpha_1\,(u_1) = \alpha_2\,(u_1) = 0$, $\alpha_3\,(u_1) = 1$ таково: после пятой итерации граничные значения удовлетворены ($\varepsilon < 1$ %), но приближение u и его производные не имеют ничего общего с точным решением $U = h \Big/ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ и его производными; увеличение числа итераций до 24 не увеличило точность приближений. В табл. 1 в четырех точках границы (точки коллокации) даны точные и приближенные значения градиента и производных (в других точках они из-за симметрии совпадают с одним из приведенных в табл. 1). Добавив 25-е фундаментальное решение (оно совпало с точным решением задачи (8)), после четвертой итерации граничные условия, решение и производные стали удовлетворять с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Чтобы разделить влияние неустойчивости граничной задачи (11) на суммарную погрешность решения граничной задачи (8), для функции $U = h \Big/ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ решена граничная задача (11). Последние столбцы табл. 1 дают решение $\bar{u}$ граничной задачи (11) в тех же точках: погрешность обусловлена неустойчивостью задачи (11), а не медленной сходимостью итераций (7).

Сходимость итераций (5) в плоском случае имеет особенности: точность решения внешней граничной задачи (4) с граничным условием $\psi\,(S) = 1 \Big/ \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\Big|_S \equiv 1$ и точным решением $u = \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ для единичного круга с центром в начале координат при начальном направлении, $\alpha_1^0 = \cos\,(t + \varphi)$, $\alpha_1^0 = \sin\,(t + \varphi)$ (t — центральный угол, φ — возмущение начального направления) зависит от φ и N. В табл. 2 приведено количество итераций N до условия их остановки $|\varepsilon_1| = \Big|\,|\mathrm{grad}\, u^{(k)}| - 1\,\Big| < 10^{-5}$, максимальные погрешности решений в точках коллокации после каждой итерации для производных — $\varepsilon_1 < 10^{-4}$, а между точками

Т а б л и ц а 1. Решение внутренней граничной задачи (8) и задачи с косой производной (11) для единичного куба

Номер	u	$\frac{\partial u}{\partial x_1}$	$\frac{\partial u}{\partial x_2}$	$\frac{\partial u}{\partial x_3}$	u_n	$\frac{\partial u_n}{\partial x_1}$	$\frac{\partial u_n}{\partial x_2}$	$\frac{\partial u_n}{\partial x_3}$	$\bar{u}$	$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}$	$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}$	$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3}$
1	21	29	29	19	39	4	4	45	30	10	10	78
2	8	1	1	1	28	0	0	8	12	1	1	5
3	14	14	8	11	36	18	2	8	19	11	6	18
4	9	3	2	6	30	18	0	8	13	1	2	8

Таблица 2. Параметры решения плоской внешней граничной задачи (4) для единичного круга

N	1	2	3	2	3	2	3	1
φ	0,001	0,1	0,1	1	1	1,57	1,57	3,14
$\varepsilon_1(\mathrm{grad}\, u)$	0,000003	0,005021	0,000004	0,850805	0,000005	0,999000	0,000060	0,000004

коллокации в конечном решении $\varepsilon_2 \approx 10^{-4}$, где $\varepsilon_{1,2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \max\left|\dfrac{\partial u^{(1,2)}}{\partial x_i} - \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|$.

Решение внутренней граничной задачи и при благоприятных условиях определяется с точностью до постоянной (поэтому не сравниваем точное и приближенное решения) и знака (при $\varphi=\pi$ первая итерация удовлетворяет граничной задаче).

Решена задача (4) с радиусом круга $r=2$ и направлением градиента $\alpha_1^0=\alpha_2^0=\sqrt{2}/2$ (совпал с прямой $x_1=x_2$). Это направление образует с нормалью угол 90° в точках круга $M_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $M_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, т. е. не выполняется условие (12). Точное решение задачи $u=0{,}693$, а граничное условие $\psi(S)=0{,}5$. В приближенном решении задачи (4) (рис. 2 — результат девяти итераций, где x_1, x_2 — координаты граничных точек коллокации) градиенты приближенного и точного решения близки, а сами решения и их производные *существенно разные*, так как приближение $\alpha_1^0=\alpha_2^0=\sqrt{2}/2$ не обеспечивает условия (12).

Для сходимости итераций (5) необходимо не только, чтобы *точное решение удовлетворяло условию* (12), но и выбор начальных приближений, для которых в итерациях (5) *не возникали бы коэффициенты* α_i^k, не обеспечивающие условия (12).

Решение по итерациям (5) *внутренней* граничной задачи для единичного круга с центром в начале координат, граничным условием $\psi(S)=1\Big/\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2}$ при направле-

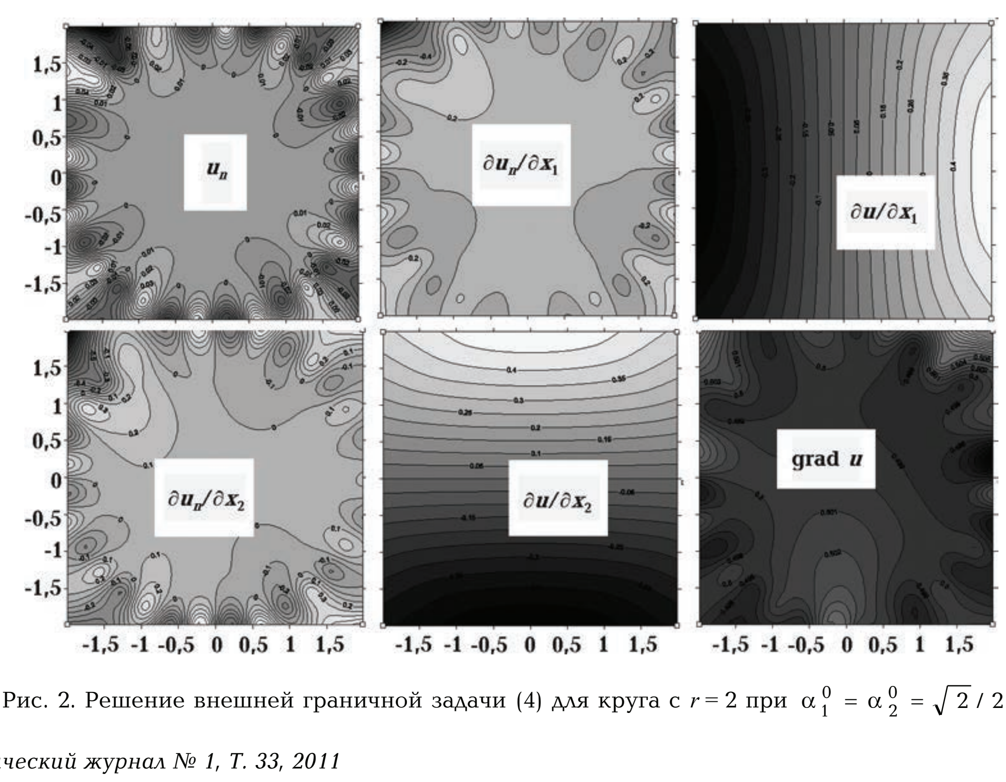


Рис. 2. Решение внешней граничной задачи (4) для круга с $r=2$ при $\alpha_1^0=\alpha_2^0=\sqrt{2}/2$.

нии градиента $\alpha_1^0 = 0{,}8315$, $\alpha_2^0 = 0{,}5556$ (как любое постоянное направление, это не обеспечивает выполнения условия (12)) иллюстрирует рис. 3 ($N = 8$ итераций). Точное решение $u = \ln\sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2}$ и комплексно-сопряженная ($\omega = u + iv$ — голоморфная функция) с ним функция v по соотношению Коши — Римана также удовлетворяют этой задаче. При α_i^0 итерации (5) стремятся не к точному решению u, а к комплексно-сопряженной функции v.

Вычисление аномалий. На практике отыскивают не потенциал $w = u + v$ силы тяжести, а потенциал u аномалии силы тяжести (потенциал нормальной силы тяжести v известен). В *линейных* приближениях граничных задач грави- и магнитометрии переход к аномалии *не изменяет* не только уравнения, но и вид оператора граничных условий [Интерпретация ..., 1992]. Необходимо лишь в качестве граничной функции $\psi(S)$ взять аномалию силы тяжести.

В нелинейных граничных задачах переход к аномалии изменяет левую часть граничных условий (3), (4), так как операция вычисления модуля градиента не дистрибутивна: $|\operatorname{grad} w| \neq |\operatorname{grad} u| + |\operatorname{grad} v|$. Если граничная функция $\psi(S)$ — модуль градиента потенциала w силы тяжести, для потенциала аномалии u получаем нелинейную граничную задачу:

$$\Delta u = 0, \quad \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \psi^2(S) - |\operatorname{grad} v|^2, \; u_\infty = v_\infty, \tag{13}$$

граничные значения которой при нулевом потенциале нормальной силы тяжести совпадают с граничными условиями (3). Решают эту задачу одним из последовательных приближений (условия на ∞ опущены):

$$\Delta u_{n+1} = 0, \quad \left.\frac{\sum_{i=1}^{3}\left(2\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i}}{|\operatorname{grad}(v + u_n)|}\right|_S = \psi(S) - \frac{|\operatorname{grad} v|^2}{\psi(S)},$$

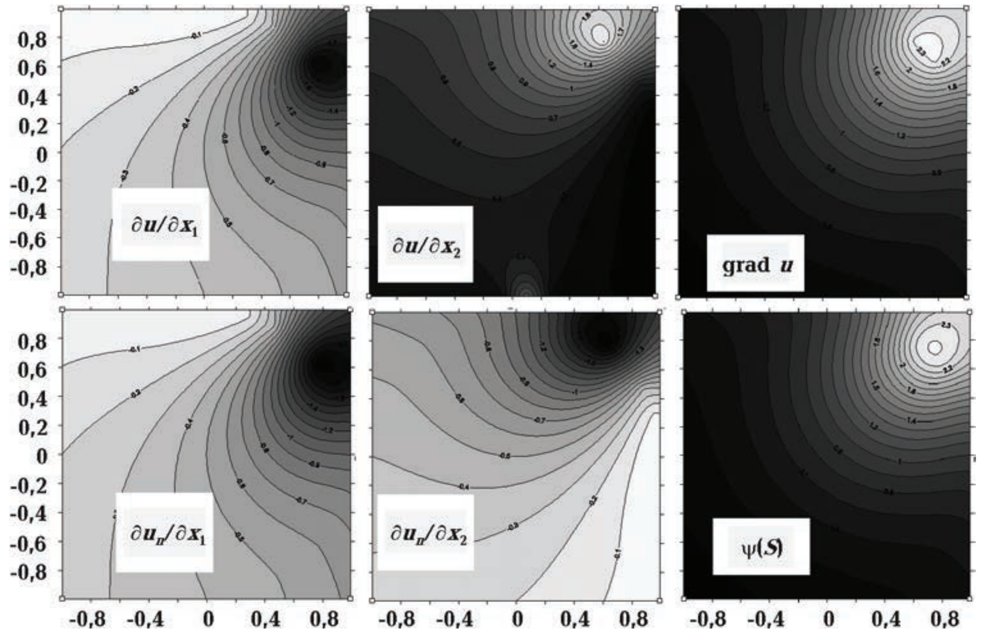


Рис. 3. Решение внутренней граничной задачи (4) для единичного круга.

$$\Delta u_{n+1} = 0, \quad \left. \frac{\sum_{i=1}^{3} \left(2\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i}}{\psi(S)} \right|_S = \psi(S) - \frac{|\operatorname{grad} v|^2}{\psi(S)}, \tag{14}$$

$$\Delta u_{n+1} = 0, \quad \left. \sum_{i=1}^{3} \left(2\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i} \right|_S = \psi^2(S) - |\operatorname{grad} v|^2 .$$

Определение численной скорости сходимости итераций (14) имеет практический интерес, так как на каждой итерации решается граничная задача и слабосходящиеся процессы существенно ухудшают эксплуатацию алгоритмов. Сходимость (14) вычислена на модели $U = \frac{h}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$, $V = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + h)^2}}$, $\psi(S) = |\operatorname{grad}(U + V)|$ на границе S (плоскость $x_3 = 5$ на 36 узлах коллокации в точках, $x_1 = -25 + 10k$, $x_2 = -25 + 10j$, $x_3 = 5$, k, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) для 36 фундаментальных решений, полюса которых находятся под узлами коллокации на плоскости $x_3 = 1$) до выполнения условия $\max_S \left| |\operatorname{grad}(v + u_n)| - \psi(S) \right| < \varepsilon$. При $\varepsilon = 10^{-3}$ первый итерационный процесс завершился за три итерации, второй — 36, последний — 103 итерации (при $\varepsilon = 10^{-4}$ — за 4, 78 и 146 соответственно).

Для всех итераций (14) первой решена граничная задача с производной вдоль x_3 на границе. Вспомогательные точки для фундаментальных решений взяты на плоскости $x_3 = 1$. Приближение решения и его производных из всех итераций хорошо совпадают между собой (при $\varepsilon = 10^{-3}$ с точностью 10^{-2}, при $\varepsilon = 10^{-4}$ с точностью 10^{-3}), но далеки от точных. Их среднеквадратичные значения в узлах коллокации (1-й столбец) и в середине между ними (2-й столбец) дает табл. 3, а соответствующие погрешности для разных $\varepsilon = 10^{-k}$ ($k = 1, 2, ..., 5$) и N — табл. 4.

Последняя таблица показывает, что *увеличение точности аппроксимации* граничных условий в узловых точках коллокации без увеличения количества узловых точек (увеличения числа функций в разложении) *не влияет* на погрешность (начиная с $k = 2$). Это говорит о нелинейном поведении погрешностей решения граничных задач с производными и побуждает исследовать погрешности решений каждой конкретной задачи.

Выводы. Трансформацию значений поля силы тяжести во внешнем пространстве можно осуществить путем решения граничной задачи (3) для уравнения силы тяжести (2), конкретный вид которого зависит от избранной модели Земли. В плоском случае эта операция сводится к решению граничной задачи (4) по итерациям (5). Точность ее решения существенно зависит от меры обусловленности задачи, приближений направления искомого градиента, параметров численного метода [Алексидзе, 1978] (числа и положения фундаментальных ре-

Таблица 3. Приближенные решения нелинейной граничной задачи (14) на плоскости

Номер	u		$\partial u / \partial x_1$		$\partial u / \partial x_2$		$\partial u / \partial x_3$	
36	0,565	0,598	0,029	0,021	0,029	0,021	0,026	0,067
64	0,605	0,611	0,032	0,028	0,032	0,028	0,038	0,053
121	0,617	0,614	0,030	0,032	0,030	0,032	0,047	0,043

Т а б л и ц а 4. Погрешности решений нелинейной граничной задачи (14) на плоскости при разной точности

k	$\varepsilon\ (u)$		$\varepsilon\ (\partial u\ /\partial x_1)$		$\varepsilon\ (\partial u\ /\ \partial x_2)$		$\varepsilon\ (\partial u\ /\ \partial x_3)$		N
1	0,206	0,025	0,019	0,007	0,019	0,007	0,025	0,057	36
5	0,050	0,173	0,019	0,006	0,019	0,006	0,018	0,057	
1	0,492	0,479	0,017	0,010	0,017	0,010	0,026	0,033	64
3	0,018	0,066	0,013	0,004	0,013	0,004	0,011	0,030	
1	0,647	0,613	0,013	0,013	0,013	0,013	0,026	0,023	121
2	0,028	0,027	0,001	0,001	0,001	0,001	0,003	0,003	
4	0,005	0,007	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	

шений), направления внешней нормали, вдоль которой вычисляют производные в граничных условиях (выполнение условия (12)). Невзирая на это, ее решение на простых моделях при определенных ограничениях успешно. Основные источники неоднозначности решений задачи — конечное вертикальное разрешение решений, неадекватный выбор модели задачи и начальных приближений решения.

Благодарю академика В.И. Старостенко за ценные замечания касательно рукописи статьи.

Список литературы

Алексидзе М.А. Редукция силы тяжести. — Тбилиси: Изд-во АН ГССР, 1965. — 256 с.

Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. — Москва: Наука, 1978. — 351 с.

Алексидзе М.А. Решение некоторых основных задач гравиметрии. — Тбилиси: Мецниереба, 1985. — 412 с.

Алексидзе М.А., Гелашвили М.С., Картвелишвили К.М. Исследование некоторых вопросов трансформации потенциальных полей. — Тбилиси: Изд-во АН ГССР, 1972. — 284 с.

Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. — Москва: Наука, 1966. — 318 с.

Дубовенко Ю.І. Задача Алексідзе для відновлення потенціалу сили тяжіння // Геофиз. журн. — 2009. — **31**, № 6. — С. 132—139.

Интерпретация гравитационных и магнитных полей: Сб. науч. трудов / Отв. ред. В.Н. Страхов, В.И. Старостенко. — Киев: Наук. думка, 1992. — 248 с.

Черный А.В. Об уравнении силы тяжести // ДАН УССР. Сер. Б. — 1970. — № 2. — С. 145—149.

Черный А.В. Описание гравитационных аномалий // Докл. АН УССР. Сер. Б. — 1982. — № 4. — С. 18—21.

Юнг К. Гравиметрические методы прикладной геофизики // Прикл. геофизика. — Москва; Ленинград: ОНТИ, 1936. — Вып. 1. — С. 53—204.

Якимчик А.І. Гранична задача відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.: 04.00.22 / Київ; ІГФ НАН України, 2001. — 16 с.